

桃園市 115 年國民中學新進教師甄選【專業科目：數學科】試題卷

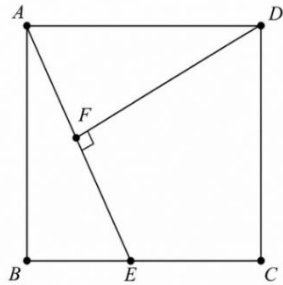
- ※注意事項：1、答案請畫在答案卡上，如寫在試題卷上一律不計分。
 2、提早繳卷者，請將答案卡與試題卷一併交回。
 3、本試題卷共 4 頁。

專業科目：請依照題意，從四個選項中選出一個正確或最佳答案（共 50 題，每題 2 分，合計 100 分）

51. 等差數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1 = 5, a_{n+1} - a_n = \frac{2}{5} (n \geq 1)$ 。若所有奇數項的總和恰比所有偶數項的總和大 21，求此等差數列的項數？

- (A) 41 (B) 61 (C) 71 (D) 81

52. 如圖，ABCD 為正方形，點 E 在邊 BC 上，且 $\overline{BE} : \overline{EC} = 1 : 3$ 。連結 \overline{AE} ，過點 D 作 $\overline{DF} \perp \overline{AE}$ ，垂足為 F。若正方形邊長為 8，求 $\overline{DF} \perp \overline{AE}$ ，求 $\overline{DF} = ?$



- (A) $\frac{8\sqrt{17}}{17}$ (B) $\frac{16\sqrt{17}}{17}$ (C) $\frac{24\sqrt{17}}{17}$ (D) $\frac{32\sqrt{17}}{17}$

53. 設實數 $x \neq -1$ 滿足 $\frac{x+1}{x^2-3x+2026} + \frac{x}{x+1} = 1$ ，

求 x 的值？

- (A) 403 (B) 404 (C) 405 (D) 406

54. 已知 $x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ 、 $y = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ ，且某三角形的面積為 $2\sqrt{3}$ 平方公分，其中一底長為 $2\sqrt{2}$ 公分。若此底所對應的高為 h ，求 $\frac{h}{x^2-y^2} = ?$

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) 1 (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

55. 某班舉辦數學測驗，全班每人都得到整數分數。老師發現：「平均分數是 78 分」、「去掉最高分後，平均變成 76 分」、「最高分是 96 分」。請問這個班共有多少人？

- (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11

56. 設 n 為自然數，試問： 10^n 除以 13 的餘數有幾種？

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

57. 數列 $\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{1}{6}, \dots \rangle$ ，依此規律，試問：第 50 項是多少？

- (A) $\frac{7}{5}$ (B) $\frac{5}{7}$ (C) $\frac{7}{6}$ (D) $\frac{6}{7}$

58. 將 $3^2 \times 4^{11} \times 5^{23}$ 乘開後是幾位數？

- (A) 21 (B) 22 (C) 23 (D) 24

59. 解方程式 $\sqrt{x + \sqrt{12x - 35}} + \sqrt{x - \sqrt{12x - 35}} = 7$

- (A) $x = \frac{2201}{148}$ (B) $x = \frac{2241}{148}$ (C) $x = \frac{2261}{148}$ (D) $x = \frac{2281}{148}$

60. $\sum_{k=1}^{10} [(2k+1)(k-3)] = ?$

- (A) 425 (B) 445 (C) 465 (D) 485

61. 若 $(x^2 - 2x + 1)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_8x^8$ ，則 $a_1 + a_2 + \dots + a_8 = ?$

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

62. 請問有多少個整數 x 滿足不等式

$$|x - 10| < |x + 10| < |x - 30| ?$$

- (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11

桃園市 115 年國民中學新進教師甄選【專業科目：數學科】試題卷

63. 介於 $\frac{1}{12}$ 與 $\frac{1}{13}$ 之間的有理數為 $\frac{k}{1092}$ 的最簡分數 (分母固定為1092) 有多少個?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 個或 5 個以上

64. 設 x 為正實數，滿足 $x^2 - 3x - 1 = 0$ ，則

$x^3 + x^2 + x^{-2} - x^{-3}$ 之值為下列何者?

- (A) 39 (B) 43 (C) 47 (D) 51

65. 某遊戲共有 210 位玩家，每位玩家均持有寶石，其中持有 1 顆的有 1 位，持有 2 顆的有 2 位，依此類推，持有 20 顆寶石的有 20 位。試問這些玩家每人持有寶石數量的第 90 百分位數為下列何者選項?

- (A) 16 (B) 17 (C) 19 (D) 20

66. 從 1 到 20 的 20 個整數中，取出相異的三個數 a 、 b 、 c ，使此三個數成為等比數列，且 $a < b < c$ ，則序對 (a, b, c) 的取法有多少種?

- (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 種

67. 投擲一顆骰子，假設點數出現之機率與點數成比例，求出現點數為 3 或 6 的機率為何?

- (A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{3}{7}$ (C) $\frac{4}{7}$ (D) $\frac{5}{7}$

68. 設 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ，已知所有滿足 $\sin 2\theta > \sin \theta$ 且 $\cos 2\theta > \cos \theta$ 的 θ 可表示成 $a\pi < \theta < b\pi$ ，其中 $a, b \in \mathbb{R}$ ，試問： $b - a$ 的值為何?

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) 1

69. 試問有多少個實數 x 滿足 $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin x + \sin \frac{\pi}{6}$ 且 $0 \leq x < 2\pi$?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

70. $y = \tan(\pi x^2)$ 的微分

- (A) $2\pi \sec^2 x$ (B) $2\pi \sec(\pi x^2)$
(C) $2\pi x \sec^2(\pi x^2)$ (D) $2\pi \tan^2(\pi x^2)$

71. 若 A 和 B 為實數矩陣，下列選項何者一定正確?

- (A) $AB \neq BA$
(B) $AB = BA$
(C) $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$
(D) $\det(AB) \neq \det(A) \times \det(B)$

72. 計算行列式 $\begin{vmatrix} 2024 & 2025 & 2026 \\ 2025 & 2026 & 2027 \\ 2026 & 2027 & 2029 \end{vmatrix}$ 之值?

- (A) 4048 (B) 4049 (C) -1 (D) 0

73. 已知實係數五次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(i) = 0$ 且 $f(2 + 3i) = 0$ ，試問：函數 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸有幾個交點?

- (A) 0 個 (B) 1 個 (C) 2 個 (D) 4 個

74. 設 $f(x, y) = x^2y^3 + e^{x+y}$ ，試求 $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = ?$

- (A) $2xy^3 + e^{x+y}$ (B) $3x^2y^2 + e^{x+y}$
(C) $6x^2y^3 + e^{x+y}$ (D) $3x^2y^2 + (x + y)e^{x+y}$

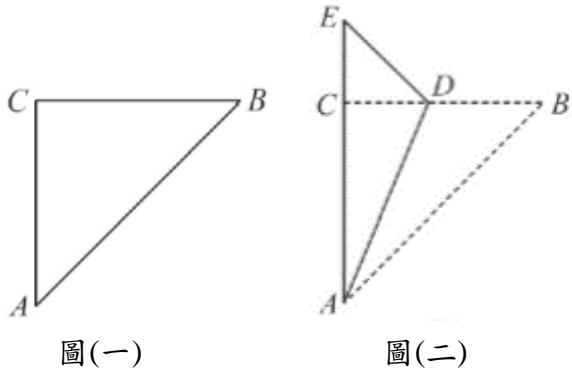
75. 將正整數從 1 開始依序按一定的規律置放於下圖的格子中。依照圖的排列規律，請問：9999 會排在第幾行?

第 1 列	1	2	5	10	17	26	⋮
第 2 列	4	3	6	11	18	27	⋮
第 3 列	9	8	7	12	19	28	⋮
	16	15	14	13	20	29	⋮
	25	24	23	22	21	30	⋮
	36	35	34	33	32	31	⋮
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	第 1 行	第 2 行	第 3 行	第 4 行			

- (A) 第 1 行 (B) 第 2 行 (C) 第 99 行 (D) 第 100 行

桃園市 115 年國民中學新進教師甄選【專業科目：數學科】試題卷

76. 如圖(一)， $\triangle ABC$ 是一張等腰直角三角形的紙卡， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\overline{AC} = \overline{BC} = 2$ 。如圖(二)，若以 \overline{AD} 為摺線 (D 點在 \overline{BC} 上)， \overline{AB} 恰好與 \overline{AC} 重合，此時 B 點則移至 E 點的位置。求 $\triangle CDE$ 的面積為何？

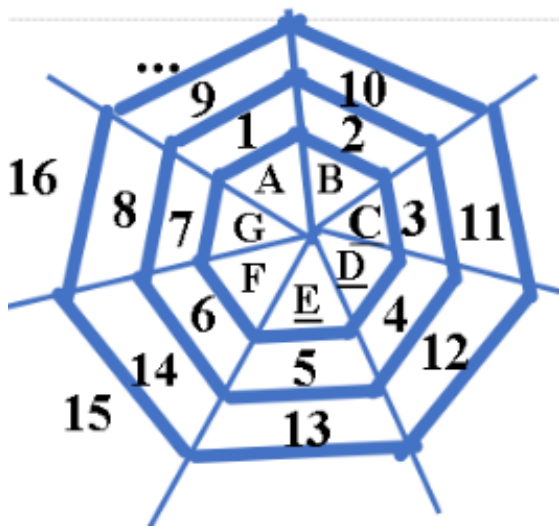


- (A) $5-2\sqrt{2}$ (B) $5-3\sqrt{2}$ (C) $6-4\sqrt{2}$ (D) $7-4\sqrt{2}$

77. 已知 $A=11111111\dots11$ 為 100 位數， $B=222\dots22$ 為 50 位數。若 $C=A-B$ ，則 C 所有位值的數字總和是多少？

- (A) 375 (B) 420 (C) 450 (D) 475

78. 如圖是一個七邊形的網狀圖，將平面分為 A、B、C、D、E、F、G 等七個區域。例如 15 號在 F 區，16 號在 G 區。依照圖中的編號規律，請問：2026 號是在哪一區？



- (A) A 區 (B) C 區 (C) E 區 (D) G 區

79. 若 α 與 β 是方程式 $x^2 + px + 8 = 0$ 的兩相異實根，且 $|\alpha| > |\beta|$ 。下列哪一個選項的結論一定不成立？

- (A) $|\alpha| > 2$ 且 $|\beta| > 2$
 (B) $|\alpha| + |\beta| > 4\sqrt{2}$
 (C) $|\alpha| > 3$ 且 $|\beta| > 3$
 (D) $|\alpha| > 2\sqrt{2}$ 且 $|\beta| < 2\sqrt{2}$

80. 「舊式門牌取下來，新型門牌亮起來」市政府新發的門牌採用以下字型製作：

1234567890

小明家的門牌號碼是四位數 a ，爸爸掛門牌時將門牌上下放相反，小明笑著說：「錯將門牌放相反，誤讓號碼多了 4782」。請問：小明的門牌號碼是幾號？

- (A) 1899 (B) 1884 (C) 1943 (D) 9559

81. 若 $\log_2 3 = a$ ， $\log_3 7 = b$ ，求 $\log_{42} 28$ 之值為何？

- (A) $\frac{2+ab}{1+a+ab}$ (B) $\frac{2+ab}{1+b+ab}$ (C) $\frac{a+2b}{1+a+b}$ (D) $\frac{2+ab}{1+a+b+ab}$

82. 試求 $\int \tan^2 x dx$ 之值為何？

- (A) $\sec x + C$ (B) $\frac{1}{3} \tan^3 x + C$
 (C) $\tan x - x + C$ (D) $\tan x + x + C$

83. 已知 $2 \ln(x-2y) = \ln x + \ln y$ ，求 $\frac{x}{y} = ?$

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

84. 如圖，王老師利用 6、15、27 枝火柴棒，依序排列出 1、2、3 層的「蜂窩圖」，如圖 1、圖 2、圖 3 所示。

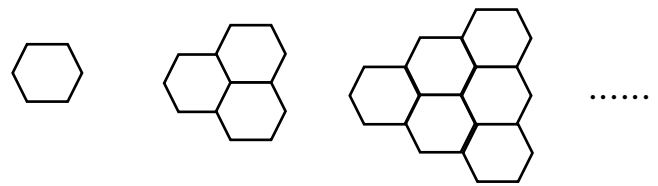


圖1 圖2 圖3 圖100

王老師若要建構出 100 層的「蜂窩圖」，請問需要多少枝火柴棒？

- (A) 15000 (B) 15300 (C) 15450 (D) 30300

85. 在十進制中，數 379_{10} 代表 $3 \times 10^2 + 7 \times 10 + 9$ 。在 r 進制中 ($r \in \mathbb{N}$)， $1020_r - 460_r = 230_r$ ，求 r 之值為何？

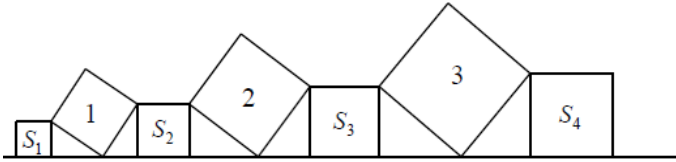
- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

桃園市 115 年國民中學新進教師甄選【專業科目：數學科】試題卷

86. 「抽牌卡·加減算」。小明分別從紅色與黑色數字牌（各有數字 1~9）中各抽取 1 張數字牌，紅色牌上的數字為 a ；黑色牌上的數字為 b 。求 $3b - a < 10$ 的機率為何？

- (A) $\frac{35}{72}$ (B) $\frac{39}{72}$ (C) $\frac{30}{81}$ (D) $\frac{39}{81}$

87. 如圖，平面上斜置面積分別為 1、2、3 平方單位的正方形以及正擺的四個正方形 S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 。請問：四個正方形 S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 的面積總和為何？



- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

88. 令 $f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{n^3}$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} 8f(2n) = ?$

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{5}{6}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) $\frac{8}{3}$

89. 設函數 $f(x)$ 滿足 $f(x+2) = \frac{f(x)-1}{f(x)+1}$ ，已知 $f(1) = -3$ ，求 $f(365) = ?$

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) 3

90. 設 $f(x) = x^2 - 4x + 5$ ， $x \in [-1, 8]$ ，求 $f(x)$ 的最大值為何？

- (A) 2 (B) 18 (C) 37 (D) 42

91. 平面上，求 $y = x^2$ 及 $x + y = 2$ 所圍成的區域，其面積為多少？

- (A) $4\frac{1}{3}$ (B) $4\frac{1}{2}$ (C) $5\frac{1}{3}$ (D) $5\frac{1}{2}$

92. 設整數 a 使得 $\frac{a-6}{a+1}$ 也是整數，求 a 的所有可能值的和為多少？

- (A) -4 (B) 0 (C) 2 (D) 6

93. 設 a_1, a_2, a_3, a_4 都是整數且滿足 $\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4} = 8$ ，

求上式中 a_1 的最大值為多少？

- (A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 16

94. 設 a, b 均為整數且 $a > b$ ，已知 $a + b + 3ab - 62 = 0$ ，求 $a + b$ 的所有可能值的和為何？

- (A) 28 (B) 34 (C) 40 (D) 52

95. 設 a, b 為直角三角形的兩股長， c 為斜邊長。若實數 x, y 滿足 $\frac{x}{2a^2} + \frac{y}{c^2} = 1$ 且 $\frac{x}{c^2} + \frac{y}{2b^2} = 1$ ，

求 $x + y$ 之值為何？

- (A) $2a^2$ (B) $2c^2$ (C) $b^2 + c^2$ (D) $a^2 + c^2$

96. 設 $0 < x < \pi$ ，求 $\frac{2 - \cos x}{\sin x}$ 的最小值為多少？

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) $3\sqrt{3}$

97. 對任意實數 x 均滿足 $f(x+3) \leq f(x) + 3$ 且

$f(x+2) \geq f(x) + 2$ ，若 $f(28) = 36$ ，求 $f(1000) = ?$

- (A) 922 (B) 964 (C) 1008 (D) 1036

98. 由數字 1、2、3 所組成的 5 位數，要求此 5 位數中 1、2、3 每一個數字至少要出現一次，求滿足這樣條件的 5 位數的個數有多少個？

- (A) 150 (B) 162 (C) 168 (D) 174

99. 設正實數 x, y 滿足 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 且 $f(2) = 2$ ，

求 $f\left(\frac{1}{32}\right) = ?$

- (A) -10 (B) -2 (C) 6 (D) 8

100. 在等腰 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，設點 E 為 \overline{AB} 的中點，延長 \overline{AB} 到點 D ，使得 $\overline{BD} = \overline{AB}$ ，則 $\overline{CD} = k\overline{CE}$ ，求 $k = ?$

- (A) 2 (B) 3 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{4}{3}$

-----試題結束-----

敬祝金榜題名